Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Naturwissenschaftliche Fakultät III
Institut für Informatik

6. Übung zur Vorlesung „Deduktive Datenbanken und logische Programmierung“

Wintersemester 2007/2008 Ausgabe: 2007-11-19

Abgabe: 2007-11-26

Aufgabe 6.1: Pseudoinverse

In der linearen Algebra wird die Pseudoinverse oder PENROSE-MOORE-Inverse als Verallgemeinerung der inversen Matrix eingeführt. Im Gegensatz zur inversen Matrix ist sie auch für nicht quadratische und singuläre Matrizen definiert und zwar wie folgt:
Für eine Matrix A wird die Matrix B genau dann Pseudoinverse genannt, wenn sie die Bedingungen

- $A \cdot B = (A \cdot B)^T$
- $B \cdot A = (B \cdot A)^T$
- $A \cdot B \cdot A = A$
- $B \cdot A \cdot B = B$

erfüllt.
Bemerkung: Die ersten beiden Bedingung sind Verallgemeinerungen von $A \cdot A^{-1} = I, A^{-1} \cdot A = I$, wobei I offensichtlich auch symmetrisch ist. Die beiden letzten Bedingung sind ebenfalls solche Verallgemeinerungen. Es wird aber nicht wie bei inversen Matrizen $A \cdot B \cdot x = x$ für alle Vektoren x gefordert, sondern nur für Spaltenvektoren von A.
Der Vektor $B \cdot y$ ist derjenige Vektor x mit kleinster euklidischer Norm, der den Abstand $\|A \cdot x - y\|_2$ minimiert.

$$\begin{aligned} M &= \{x : \forall z \ \|A \cdot x - y\|_2 \leq \|A \cdot z - y\|_2\} \\ B \cdot y &= \operatorname*{argmin}_{x \in M} \|x\|_2 \end{aligned}$$

a) Schreiben Sie ein PROLOG-Prädikat, welches prüft, ob die Pseudoinverse eindeutig definiert ist.

b) Erweitern Sie das Prädikat so, dass es auch den Beweis ausgibt.

Hinweise: Gehen Sie von zwei Matrizen B und C aus, die beide die Bedingungen für Pseudoinverse erfüllen und zeigen Sie, dass $B = C$ gilt, indem Sie die Bedingungen für die Pseudoinverse als Umformungsschritte benutzen. Da die Matrixmultiplikation assoziativ ist, lassen sich alle Terme als Liste von Matrizen verwalten. Implementieren Sie ein Prädikat `replace` für eine „Suchen&Ersetzen“-Operation. Diese lässt sich elegant und ohne Rekursion mit dem Standardprädikat `append` implementieren!
Da die Anzahl der möglichen Terme exponentiell mit der Suchtiefe wächst, sollten Sie sich überlegen, wie sie die Suchtiefe halbieren können. (Sprich: Für einen Beweis mit n Umformungsschritten muss man nur bis zur Rekursionstiefe $\frac{n}{2}$ suchen). Außerdem sollten Sie zur Geschwindigkeitssteigerung überflüssige Terme entfernen. Sollten Sie keinen Beweis finden, haben Sie wahrscheinlich gewisse Einsatzmöglichkeiten der 4 Bedingungen vernachlässigt.
Bemerkung: Für eine reguläre Matrix ist die Pseudoinverse die gewöhnliche Matrixinverse, denn die gewöhnliche Matrixinverse erfüllt die Bedingungen der Pseudoinversen und die Pseudoinverse ist eindeutig definiert.

e-mail: {brass,thielema}@informatik.uni-halle.de Web: http://www.informatik.uni-halle.de/~{brass,thielema}